Université de Versailles - Saint Quentin **Année 2017/2018**
L3 Algèbre **Maria Chlouveraki**

Anneaux principaux - TD 6

1. Soit k un corps et soient $f(x), g(x) \in k[x]$ avec $g(x) \neq 0$. Montrer qu'il existe $q(x), r(x) \in k[x]$ tels que
(i) $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$, et
(ii) $r(x) = 0$ ou $\deg r(x) < \deg g(x)$.
De plus, $q(x)$ et $r(x)$ sont uniques *(indication: récurrence sur* $\deg f$*)*.

2. Soit k un corps. Montrer que $k[x]$ est un anneau principal.

3. Soit k un corps et soit $f(x) \in k[x]$ avec $f(x) \notin k$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
(1) l'idéal $(f(x))$ de $k[x]$ est premier ;
(2) l'idéal $(f(x))$ de $k[x]$ est maximal ;
(3) $f(x)$ est irréductible dans $k[x]$.

4. Calculer les idéaux suivants de $\mathbb{Q}[x]$ et déterminer s'ils sont premiers et/ou maximaux :
$I_1 = (x-1, x^2+1)$, $I_2 = (x-1, x^2-1)$, $I_3 = (x-1) \cap (x^2+1)$, $I_4 = (x-1) \cap (x^2-1)$.

5. Montrer que $\mathbb{Z}[x]$ n'est pas un anneau principal de 3 façons : trouver un idéal qui n'est pas principal, trouver un idéal premier qui n'est pas maximal et trouver un contre-exemple au théorème de Bezout.

6. Montrer que la division euclidienne ne marche pas dans $\mathbb{Z}[x]$ de 2 façons.

7. Soit R un anneau principal, S un anneau intègre et $f : R \to S$ un épimorphisme. Montrer que soit f est un isomorphisme soit S est un corps.

8. Montrer que $R[x]$ est principal si et seulement si R est un corps.

9. Un anneau R s'appelle *euclidien* si R est intègre et il existe une application $\varphi : R \setminus \{0_R\} \to \mathbb{N}$ telle que, pour tous $a \in R$, $b \in R \setminus \{0_R\}$,
(i) si $a|b$, alors $\varphi(a) \leqslant \varphi(b)$;
(ii) il existe $q, r \in R$ tels que $a = bq + r$, et $r = 0$ ou $\varphi(r) < \varphi(b)$.
L'application φ s'appelle *stathme euclidien*. Montrer que tout anneau euclidien est principal.

10.* Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un anneau euclidien pour le stathme $\varphi : \mathbb{Z}[i] \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$, $a+bi \mapsto a^2+b^2$.